Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление»
www.rypravlenie.ru **том 17 № 4 (53), 2021, ст. 2**

УДК 338.26.015:658.5

ТЕНЗОРНАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ ЛОГИСТИКИ

Петров Андрей Евгеньевич, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизированного проектирования и дизайна ФГБОУ высшего образования «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Аннотация

Сетевая модель системы логистики разработана на основе тензорного метода двойственных сетей. Сеть состоит из ветвей производителей, потребителей и связывающих их маршрутов, по которым потоки продуктов из пунктов отправления, проходят по маршрутам в пункты назначения. Заданы потоки производителей и потребителей. Сопротивления ветвей задают тарифы хранения и перевозки продуктов. Сеть рассматривается как тензор, проекциями которого в системы координат являются различные соединения ветвей. Координатами в пространстве сети являются замкнутые и разомкнутые пути. При изменении структуры сети новое решение получается с помощью матрицы преобразования путей. Ветви производителей и потребителей определяют базис разомкнутых путей. Ветви маршрутов определяют базис замкнутых путей. Потоки производителей и потребителей заданы источниками напряжения. Расчет контурной сети с этими источниками дает токи в ветвях, представляющие часть распределения потоков продуктов по маршрутам. Для дополнения до полных потоков продуктов вводятся источники напряжения в ветвях маршрутов, определяющих базисные контуры. Токи в ветвях входа и выхода от источников в маршрутах равны разности токов в простейшей и связанной сети. По ним получаются дополнительные токи в ветвях маршрутов по закону Кирхгофа, причем только для маршрутов, число которых равно числу базисных разомкнутых путей без единицы. Для ветвей маршрутов базисных контуров сверх этого числа, значения токов дополнения следует выбрать. Сумма токов от всех источников дает значения потоков продуктов от поставщиков к потребителям, решая задачу логистики. Тензорный метод сетевых моделей позволяет рассчитать потоки при изменении структуры, включая декомпозицию и расчет по частям сложных сетей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сетевая модель, тензорный метод, матрицы преобразования путей, инвариант двойственности, система логистики, транспортировка продуктов.

TENSOR NETWORK MODEL OF LOGISTICS SYSTEM

Petrov Andrey Evgenyevich, Professor of Department of Computer aided design and engineering design, Ph.D &D.Sc., Professor, National University of Science and Technology MISIS (NUST MISIS), Department of Computer aided design and engineering design

Abstract

The network model of the logistics system is developed on the basis of the tensor method of dual networks. The network consists of branches of producers, consumers and their connecting routes, along which the flow of products from points of departure passes along routes to destinations. Producer and consumer flows are specified. Branch resistances set the rates for storing and transporting products. The network is considered as a tensor, the projections of which in the coordinate system are various connections of branches. Coordinates in the space of the network are closed and open paths. A new solution is obtained using the path transformation matrix when the structure changes. The producer and consumer branches define the basis of the open paths. Route branches define the basis of closed paths. The flows of producers and consumers are specified by voltage sources. The calculation of the mesh network with these sources yields currents in the branches representing part of the distribution of product flows along routes. To supplement the complete product flows, voltage sources are introduced in the route branches that define the base circuits. The currents in the input and output branches of the sources in the routes are equal to the differences in the currents in the simplest and connected network. They produce additional currents in the branches of the routes according to Kirchhoff's law, and only for routes whose number is equal to the number of basic open paths without one. For route branches of the base circuits beyond this number, the values of the complement currents should be selected. The sum of the currents from all sources gives values of product flows from suppliers to consumers, solving the problem of logistics. The tensor method of network models allows you to calculate flows when the structure changes, including decomposition and calculation of parts of complex networks.

KEYWORDS: network model, tensor method, path transformation matrices, duality invariant, logistics system, product transportation.

Введение

Задача логистики состоит в перевозке потоков продуктов по маршрутам, которые связывают производителей и потребителей. Маршруты характеризует стоимость перевозки (тарифы), протяженность и пропускная способность. Могут изменяться маршруты, тарифы, спрос и предложение. Задача логистики имеет сетевой характер. Расчет потоков в системах логистики требует выполнения больших объемов вычислений.

Оптимизация перевозок рассматривается в транспортной задаче линейного программирования. Продукты перевозят по маршрутам или хранят на складах. Стоимость перевозки и хранения на складах единицы товара для каждого маршрута задает объединенная матрица. Надо определить маршруты, которые позволят выполнить перевозки за наименьшее время, или с наименьшими затратами. Предполагается, что сумма поставок равна сумме спроса.

Известны различные методы решения транспортной задачи. Например, метод северо-западного угла, метод аппроксимации Фогеля, метод дифференциальных рент, метод потенциалов. В этих методах сначала потоки распределяют между пунктами назначения и получают опорный план. На последующих итерациях определяется оптимальный план путем улучшения текущего опорного плана.

Топологическую модель в виде эквивалентной электрической цепи для транспортной задачи разработал Г. Крон [1]. Модель предназначена для решения по частям задачи линейного программирования (ЗЛП), и оптимизации стоимости перевозок.

В сетевой модели Крона есть шесть видов величин: импедансы и проводимости, контурные источники напряжения и токи отклика, узловые источники тока и отклики – напряжения. В транспортной системе есть три вида величин: количество товаров, стоимость транспортировки и стоимость хранения. Хотя Крон считал, что транспортным ценам следует поставить в соответствие импедансы, однако затем он полагает, что эти величины равны единицам. В этом случае ток и напряжение в каждой ветви численно равны. Стоимости транспортировки и хранения потоков продуктов на входе и на выходе Крон рассматривал как источники напряжений.

Сетевая модель реализует симплексный метод ЗЛП, что позволяет решить задачу по частям. Крон представил целевую функцию как минимизацию мощности, однако при этом напряжение относится к контурной сети, а ток – к узловой сети. Потоки входа и выхода рассматриваются как источники тока. Потоки продуктов соответствуют сумме узловых и контурных токов, которые в каждой ветви остаются постоянными.

Изменения соединения ветвей (выбор маршрутов) меняют число замкнутых и разомкнутых путей, при этом меняются узловые и контурные составляющие тока. Надо так выбрать маршруты, чтобы мощность стала минимальной. Модель получилась сложной для применения. Г. Крон считал, что симплексный метод проще и эффективнее, но сетевая модель дает физическую интерпретацию, и может применяться для расчета по частям.

Тензорный анализ сетей применялся для анализа транспортных систем в ряде работ для инженерно-экономического анализа [5], оптимизации сети авиалиний [12], инженерных расчетов [13], анализа повреждений [14], и транспортных потоков [15, 16, 18]. Дискретный тензорный анализ применяется для моделирования на железнодорожном транспорте [20], для расчетов тензорной модели сети на основе симплексного метода Данцига [22]; а также в модели распределения трафика в многоуровневой инфокоммуникационной сети [23].

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы представить потоки продуктов токами в электрической цепи; тарифы заданы сопротивлениями, а напряжения дают стоимость перевозки. Полученная модель позволяет применять методы расчета сетей при изменении структуры, включая декомпозицию и расчет по частям сложных систем логистики. Для расчетов могут применяться алгоритмы тензорного метода двойственных сетей [2, 3, 4]. План перевозки получается без итераций, электрическая цепь подчиняется принципу наименьшего действия и обладает оптимальностью [6, 7, 8].

Тензорный метод расчета сетей

Для создания сетевой модели системы логистики применяется тензорный метод двойственных сетей [3, 6, 8, 9]. Сеть состоит из ветвей, соединенных структурой связей. Сеть рассматривается как тензор, проекциями которого в системы координат являются различные структуры, схемы соединения ветвей.

Координатами в пространстве сети являются замкнутые и разомкнутые пути, составляющие ортогональные подпространства. Путь – это линия, проходящая вдоль ветвей, может совпадать, или не совпадать с ними по направлению. Пути могут меняться по составу элементов, через которые они проходят, по ориентации, и могут замыкаться или размыкаться. Изменение структуры системы состоит в изменении границ, соединении или разъединении элементов, например, ветвей сети. При этом изменяется число базисных замкнутых и разомкнутых путей, что изменяет размерность их пространств, а матрицы преобразования путей становятся прямоугольными; т.е. не имеют обратных.

В двойственной сети замкнутым путям соответствуют разомкнутые пути, и наоборот, а соединениям соответствуют разъединения, и наоборот. Сумма размерностей пространств базисных замкнутых и разомкнутых путей в двух сетях постоянная. Инвариант двойственности выражается постоянством суммы метрических тензоров двух двойственных сетей при изменении структуры. Это позволяют применять сети для моделирования систем разных предметных областей. Инварианту двойственности соответствует постоянство суммы мощностей в двух электрических цепях с двойственной структурой при изменении соединения ветвей. Так проявляется закон сохранения потока энергии.

Простейшей системой координат является сеть из отдельных ветвей, в которой пути проходят по своим ветвям. В сети протекают процессы как отклики на приложенные воздействия. Переход к связанной контурной сети осуществляется с помощью матрицы преобразования путей C, состоящей из подматрицы преобразования замкнутых путей ${}^{m}C$ и подматрицы преобразования разомкнутых путей ${}^{j}C$. Переход к связанной узловой сети осуществляется матрицей преобразования путей взаимного базиса $A = C^{-1}{}_{t}$; она состоит из подматрицы преобразования замкнутых путей ${}^{m}A$ и подматрицы преобразования разомкнутых путей ${}^{j}A$. В двойственной сети матрицы C и A меняются местами [2, 3, 8, 9].

Абстрактную сеть наглядно представляет электрическая цепь, в которой процессы описывает закон Ома, $e_a = Z_{ab}\, i^b$, как в простейшей сети, так и в связанной сети. Структуру описывают законы Кирхгофа: равенство нулю суммы токов в узлах и равенство нулю суммы напряжений в контурах.

Источники напряжения в ветвях e_0 являются внутренними воздействиями. Отклики, токи возникают в ветвях, базисом являются замкнутые пути, контуры. Расчет осуществляется как преобразование решения простейшей сети в решение связанной контурной сети с помощью матрицы преобразования путей ${}^{m}C$ [3, 4].

$$i_{\text{c}} = {}^{m}C_t\, i` = {}^{m}C_t\, ({}^{m}C\, Z\, {}^{m}C_t)^{-1}\, {}^{m}C\, e_0 = Y_c\, e_0 \qquad (1)$$

где i_{c} – измеримые токи в ветвях сети, $i`$ – токи в контурах базиса, e_0 – заданные источники напряжения, Z – матрица импедансов простейшей сети, Y_c – матрица решения, метрический тензор связанной контурной сети. Напряжения в ветвях получим, умножая матрицу импедансов на токи в ветвях: $e_{\text{c}} = Z\, i_{\text{c}}$.

Внешние воздействия, источники тока, расположены вне цепи и действуют через узлы входа и выхода. Отклики, напряжения, возникают на ветвях, базисом являются разомкнутые пути. Используется матрица преобразования путей взаимного базиса $A = C^{-1}{}_{t}$. Расчет осуществляется как преобразование решения простейшей сети в решение связанной узловой сети с помощью матрицы преобразования разомкнутых путей ${}^{j}A$ [3, 4].

$$E_c = {}^jA_t\,E^{`} = {}^jA_t\,({}^jA\,Y\,{}^jA_t)^{-1}\,{}^jA\,I^0 = Z_c\,I^0 \tag{2}$$

где E_c – измеримые напряжения на ветвях сети, $E^{`}$ – напряжения, как разность потенциалов, возникают на разомкнутых путях базиса, I^0 – заданные источники тока, $Y = Z^{-1}$ – матрица проводимостей простейшей сети, Z_c – матрица решения, метрический тензор связанной узловой сети. Значения токов в ветвях получим, умножая проводимостей на напряжения на ветвях: $I^c = Y\,E_c$.

В силу ортогональности матриц C и A, $A = C^{-1}{}_t$, токи и напряжения в контурной и узловой сети не зависят друг от друга. Это позволяет применять сети для моделирования систем, в которых действуют разные виды энергии. Например, потоки механической и тепловой энергии, как в установках нефтепереработки [21].

При переходе от свободных замкнутых ветвей с метрикой Z или разомкнутых ветвей с метрикой $Y = (Z)^{-1}$ к соединенной сети инвариант двойственности имеет вид:

$$Z_c\,Y + Z\,Y_c = I \tag{3}$$

Для двойственной сети (величины подчеркнуты) инвариант двойственности имеет вид:

$$\underline{Z}\,\underline{Y}_c + \underline{Z}_c\,\underline{Y} = I, \tag{4}$$

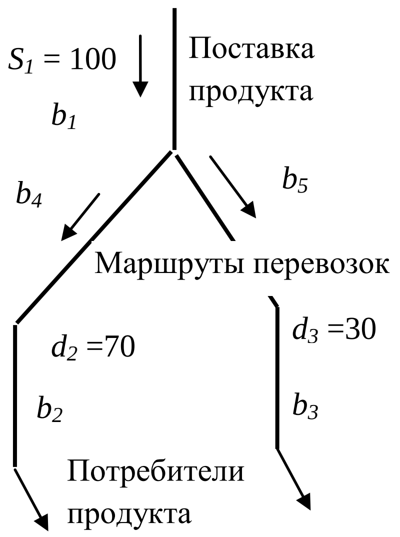
где I – единичная матрица. Аналогичные соотношения существуют между метрическими тензорами контурных и узловых двойственных сетей [2, 3].

Метод создания сетевой модели системы логистики

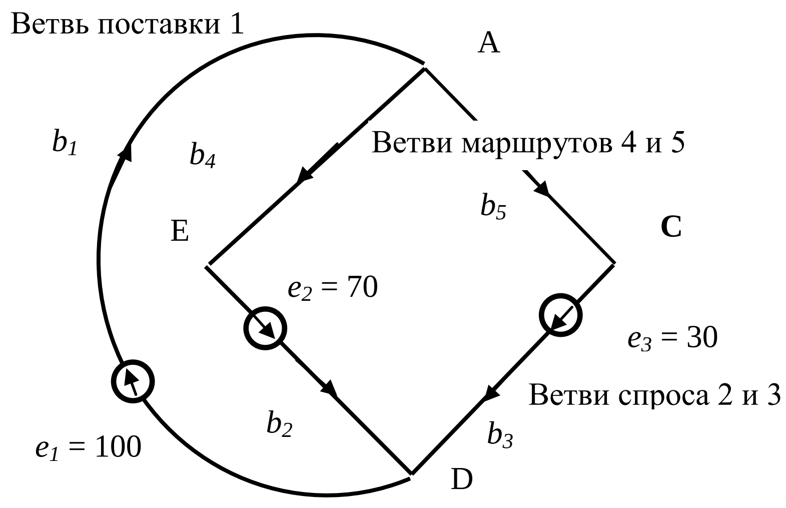
Метод состоит в том, чтобы установить аналогии между системой логистики и сетью, топологию сети на основе анализа простой модели, представить потоки продуктов токами в сети. Тогда стоимость перевозки представят напряжения на ветвях маршрутов. Модель может применяться для расчета сети при изменении структуры, включая расчет сложных систем по частям [3, 10].

Рассмотрим простую систему логистики и потоки в ней. В этой системе один поставщик, два потребителя, два маршрута и она представлена на рисунке 1 слева. Поток продукта от производителя в 100 единиц поставляется по двум маршрутам к двум потребителям, получающим 70 и 30 единиц продукта соответственно. Потоки по маршрутам равны потребностям потребителей, поэтому их распределение однозначно.

Анализ аналогий системы логистики и сети был проведен в [19], где показано, что для простой системы логистики, представленной на рисунке 1а, наиболее адекватна сетевая модель, представленная на рисунке 1б.



а) Простая система логистики: поставщик, два маршрута и два потребителя



б) Сетевая модель простой системы логистики из 5 ветвей

Рис. 1. Простая транспортная система логистики и ее сетевая модель из 5 ветвей

Структура сетевой модели отличается от структуры логистической системы. Поскольку предполагается, что имеется равенство суммы поставок и суммы потребления, то вход производства и выход потребления можно рассматривать как «заземление» и связать их в одном узле *D*.

В результате в сетевой модели возникают два замкнутых пути, контура, которых нет в системе логистики. Оказалось, что именно такая структура сети позволяет адекватно представить потоки продуктов в системе логистики. В сетевой модели воздействия, предложения поставщиков и спрос потребителей, представлены источниками напряжения, которые расположены в ветвях входа и выхода.

Поставщики, потребители и связывающие их маршруты представлены ветвями сети, по которым проходят потоки продуктов, представленные контурными токами. Тарифы хранения и перевозки продуктов задают сопротивления ветвей. Заданные потоки производителей (поставщиков) и потоки спроса потребителей представлены источниками напряжения e_0. Пусть сопротивления ветвей поставщиков и потребителей равны единицам. Тогда из уравнения $e_0 = Z\, i^0$ получим, что в сети из отдельных ветвей токи $i^0 = Z^{-1} e_0$ в ветвях входа и выхода равны предложению поставщиков и спросу потребителей, а токи в ветвях маршрутов равны нулю.

По топологии сети логистики ветви производителей и потребителей определяют базис разомкнутых путей. Ветви маршрутов определят базис замкнутых путей в сети. Расчет по формуле (1) соединенной контурной сети с источниками напряжения $e^1{}_0$ дает токи в ветвях $i_c{}^1$, представляющие, хотя и не полностью, распределение потоков продуктов по маршрутам. Источники напряжения $e^1{}_0$ состоят из $e_1{}^1{}_0$ – предложения продуктов в ветвях поставщиков и $e_2{}^1{}_0$ – предложения продуктов в ветвях в ветвях потребителей. Это решение можно рассматривать как опорный план, и записать как

$$i_c{}^1 = Y_c\, e_0 = {}^mC_t\, ({}^mC\, Z\, {}^mC_t)^{-1}\, {}^mC\, e^1{}_0, \tag{5}$$

где $i_c{}^1$ состоит из $i_{1c}{}^1$ в ветвях входа, $i_{2c}{}^1$ в ветвях выхода и $i_{3c}{}^1$ в ветвях маршрутов.

Полученные токи отличаются от заданных величин предложения на $i_{1c}{}^2 = i_1{}^0 – i_{1c}{}^1$ и спроса на $i_{2c}{}^2 = i_2{}^0 – i_{2c}{}^1$.

Для дополнения до полных потоков продуктов вводятся источники напряжения в ветвях маршрутов, определяющих базисные контуры. Эти источники должны дать такие токи в ветвях входа $i_{1c}{}^2$ и токи в ветвях выхода $i_{2c}{}^2$, чтобы они дополнили токи $i_c{}^1$ до заданных значений потоков поставщиков и потребителей. Тогда токи $i_{3c}{}^1 + i_{3c}{}^2$ будут соответствовать потокам продуктов в маршрутах.

Токи в ветвях входа и выхода должны равняться разности токов в простейшей и связанной сети $i_c{}^2 = i^0 - i_c{}^1$, их создают новые источники напряжения в маршрутах $e_3{}^2$. Дополнительные токи $i_{3c}{}^2$ в ветвях маршрутов получаются по закону Кирхгофа для узлов, границ маршрутов. Формально баланс токов в этих узлах дает матрица ициденций $M_0{}^1$, связывающая узлы и ветви, на основе которой получим систему уравнений.

$$M_0{}^1\, i_c{}^1 = 0. \tag{6}$$

Решая эту систему уравнений, получаем токи дополнения только для тех маршрутов, число которых равно числу базисных разомкнутых путей без единицы, т.е. $j – 1$. Для ветвей маршрутов, представляющих m базисных контуров сверх этого числа, т.е. для $m – j + 1$, значения новых токов необходимо задать.

Свобода выбора части токов дополнения позволяет оптимизировать выбор маршрутов по разным критериям; назначить потоки по выбранным маршрутам в силу тех или иных предпочтений.

Итак, потоки продуктов от поставщиков, представленные суммой токов $i_{1c}{}^1 + i_{1c}{}^2$, распределяются по маршрутам $i_{3c}{}^1 + i_{3c}{}^2$, и поступают к потребителям в нужном количестве $i_{2c}{}^1 + i_{2c}{}^2$, решая задачу логистики. Такая же проблема необходимости введения дополнительных источников для представления потоков продуктов, возникла при разработке сетевой модели межотраслевого баланса [2, 3, 7]. Проблема там была решена за счет использования потоков в двойственной контурной сети.

Тензорный метод сетевых моделей позволяет рассчитать потоки при изменении структуры, включая декомпозицию и расчет по частям сложных сетей с помощью эффективных алгоритмов.

Произведение тарифов, представленных сопротивлением ветвей, на поток продукта дает стоимость перевозки по данному пути, а сумма по всем путям определяет общую стоимость перевозки. Изменяя распределение потоков по путям с наиболее выгодной стоимостью можно снизить издержки, затраты на перевозку, транспортировку грузов.

Результаты расчета сетевой модели логистической системы и обсуждение

На рисунке 2 представлен пример сетевой модели логистической системы, структура которой аналогична той, которая показана на рисунке 1. Сеть включает в себя двух поставщиков, представленных ветвями 1 и 2, трех потребителей – ветви 3, 4, 5, которые связывают шесть маршрутов, представленные ветвями с 6 по 11. Сопротивления ветвей задают тарифы, стоимость перевозки единицы продукта. Расчет проводится в два этапа.

1. Зададим потоки продуктов от поставщиков в ветви 1 – 300 единиц, а в ветви 2 – 200 единиц; спрос потребителей в ветви 3 составляет 100 единиц, 4 – 350, и 5 – 50 единиц. Предложение и спрос представлены на схеме источниками напряжения $e^1{}_0$.

$$e^1{}_0 = \begin{array}{ccccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 300 & 200 & 100 & 350 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad (7)$$

Шесть ветвей маршрутов пока не имеют источников воздействия. Ветви входа и выхода определяют разомкнутые базисные пути, ветви маршрутов – замкнутые базисные пути. Топология сети: ветвей n = 11, узлов J = 6, подсетей s = 1, разомкнутых базисных путей $j = J - s = 6 - 1 = 5$, замкнутых базисных путей $m = n - j = 11 - 5 = 6$.

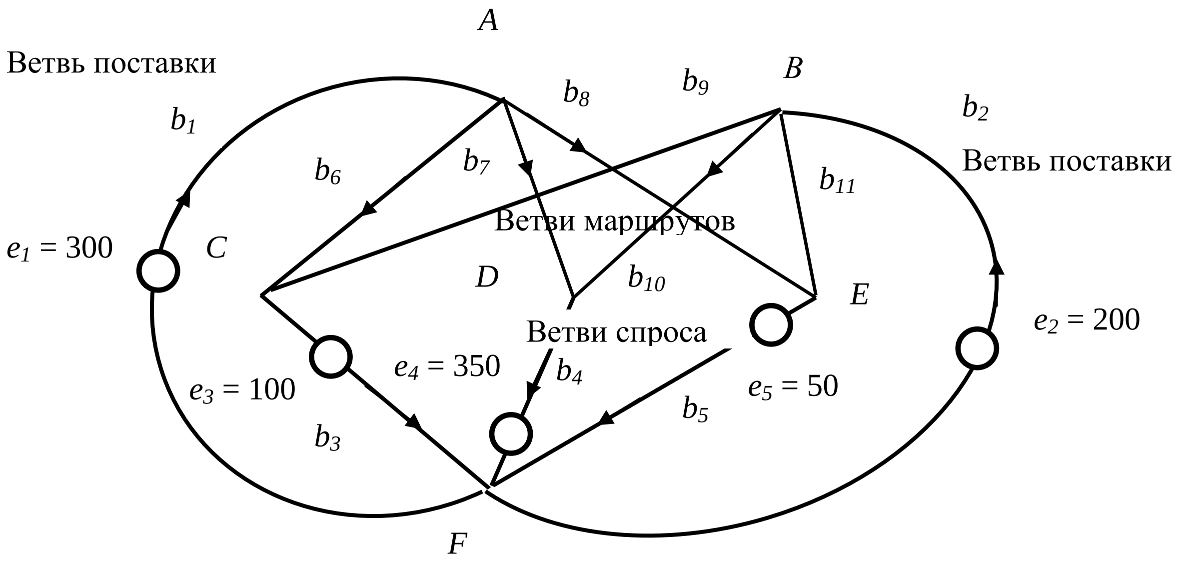


Рис. 2. Сетевая модель транспортной системы из 11 ветвей для двух поставщиков и трех потребителей

Матрица преобразования описывает структуру перевозок продуктов. Матрица преобразования от путей сети из отдельных ветвей к путям в связанной сети, в которой строки указывают выбор путей, имеет вид:

$C =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	${}^{j}C$
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
6	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	
7	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	
8	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	${}^{m}C$
9	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	
10	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	

(8)

Ветви входа и выхода определяют разомкнутые пути. Это первые пять строк, которые составляют матрицу ${}^{j}C$. Ветви маршрутов определяют замкнутые пути – последние шесть строк, они составляют матрицу ${}^{m}C$. Используя матрицу ${}^{m}C$, получим по формуле (1) матрицу решения контурной сети Y_c.

Пусть сопротивления ветвей равны единицам. Далее сопротивления будем рассматривать как тарифы для расчета стоимости транспортировки и хранения продуктов. Тогда метрическая матрица базисных контуров связанной сети имеет вид ${}^{m}C\ {}^{m}C_t = z` =$

	6	7	8	9	10	11
6	3,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0
7	1,0	3,0	1,0	0,0	1,0	0,0
8	1,0	1,0	3,0	0,0	0,0	1,0
9	1,0	0,0	0,0	3,0	1,0	1,0
10	0,0	1,0	0,0	1,0	3,0	1,0
11	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	3,0

(9)

Обращая полученную матрицу $z`$, и умножая ее слева на $^{m}C_t$, а справа на $^{m}C$, получим матрицу решения $Y_c = {}^{m}C_t\,(z`)^{-1}\,{}^{m}C =$

$C =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,625	-0,125	0,167	0,167	0,167	0,208	0,208	0,208	-0,042	-0,042	-0,042
2	-0,125	0,625	0,167	0,167	0,167	-0,042	-0,042	-0,042	0,208	0,208	0,208
3	0,167	0,167	0,556	-0,111	-0,111	0,278	-0,056	-0,056	0,278	-0,056	-0,056
4	0,167	0,167	-0,111	0,556	-0,111	-0,056	0,278	-0,056	-0,056	0,278	-0,056
5	0,167	0,167	-0,111	-0,111	0,556	-0,056	-0,056	0,278	-0,056	-0,056	0,278
6	0,208	-0,042	0,278	-0,056	-0,056	0,514	-0,153	-0,153	-0,236	0,097	0,097
7	0,208	-0,042	-0,056	0,278	-0,056	-0,153	0,514	-0,153	0,097	-0,236	0,097
8	0,208	-0,042	-0,056	-0,056	0,278	-0,153	-0,153	0,514	0,097	0,097	-0,236
9	-0,042	0,208	0,278	-0,056	-0,056	-0,236	0,097	0,097	0,514	-0,153	-0,153
10	-0,042	0,208	-0,056	0,278	-0,056	0,097	-0,236	0,097	-0,153	0,514	-0,153
11	-0,042	0,208	-0,056	-0,056	0,278	0,097	0,097	-0,236	-0,153	-0,153	0,514

(10)

Умножим эту матрицу решения на вектор воздействия, заданный предложением и спросом, и представленный источниками напряжения e^{1}_{0} в векторе (6), в результате получим отклики, токи в ветвях контурной сети $^{m}i_c^{1}$ на первом этапе.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$^{m}i^{1}{}_{c} =$	245,83	170,83	94,44	261,11	61,11	59,72	143,06	43,06	34,72	118,06	18,06

Поскольку сопротивления равны единицам, полученные токи в ветвях численно равны напряжениям на ветвях $^{m}i^{1}{}_{c} = {}^{m}e_{1c}$. Это токи, которые должны быть аналогами потоков продуктов в логистической сети. Однако полученные токи отклика на воздействия в ветвях входа и выхода (складов) не полностью соответствуют потокам продуктов, которые должны двигаться от входа к выходу.

Результаты расчета контурной сетевой модели на первом этапе (токи, численно равны напряжениям), показаны на рисунке 3.

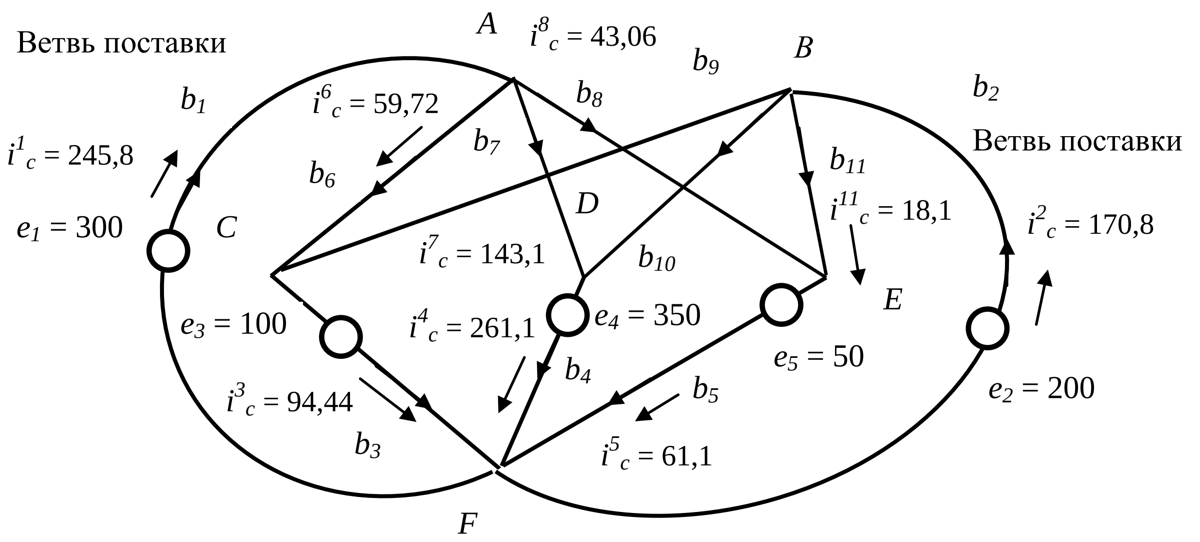


Рис. 3. Результаты расчета сетевой модели системы логистики на первом этапе

2. В сетевой модели ветви входа и выхода определяют разомкнутые пути. Базис замкнутых путей, их определяют ветви маршрутов, дает независимые токи, которые можно использовать для конструирования потоков продуктов в логистической системе. Надо найти такие источники напряжения в ветвях маршрутов, отклики на которые дополнят токи, полученные на первом этапе, до значений потоков продуктов.

Обозначим число ветвей производителей n_1, число ветвей потребителей n_2, а число ветвей маршрутов n_3. Общее число ветвей n в сети равно $n = n_1 + n_2 + n_3$. В каждой отдельной ветви два узла. В сети ветви соединены узлами. Пусть поставщики связаны с потребителями через узел заземления. Это означает, что все произведенные продукты доставлены потребителям. Тогда число узлов J равно сумме ветвей производителей и потребителей плюс один $J = n_1 + n_2 + 1$. Если ветви маршрутов еще не добавлены, то пока в сети есть только разомкнутые пути. Число базисных разомкнутых путей j равно

$$j = J - s = J - 1 = n_1 + n_2 + 1 - 1 = n_1 + n_2, \text{ где } s \text{ – число подсетей.} \quad (11)$$

Таким образом, базис разомкнутых путей состоит из ветвей входа и выхода. Ветви маршрутов, которые соединяют выходы производителей с входами потребителей, добавляют контуры, поскольку при этом число узлов не меняется. Таким образом, ветви маршрутов определяют базис замкнутых путей, размерность которого $m = n_3$. Источники напряжения в ветвях маршрутов создают в сети дополнительные токи. В сумме с токами, полученными на первом этапе, они дадут значения, численно равные потокам продуктов в логистической сети. Прежде всего, токи от источников в ветвях маршрутов должны дополнить токи в ветвях входа и выхода до заданных потоков предложения и спроса.

Размерность m базиса замкнутых путей может отличаться от размерности базиса разомкнутых путей j. Если каждый вход соединить с одним выходом, то число маршрутов m будет равно большему из чисел n_1 или n_2. Если все входы соединены со всеми выходами, то число маршрутов будет равно $m = n_1\ n_2$. Это больше, чем размерность базиса открытых путей $j = n_1 + n_2$. Тогда некоторым контурам, их число $m – j$, надо назначить значения. Таким образом, появляется свобода выбора объемов перевозки по некоторым маршрутам, что позволяет оптимизировать, например, стоимость перевозки в данной сети.

Рассмотрим разности между токами в отдельных ветвях сети, и полученными в результате расчета контурной сети на первом этапе. Они соответствуют токам в узловой сети в силу инварианта двойственности. Однако для построения потоков продуктов нужны только разности токов в простейшей и контурной сети $i_c^2 = i_c^0 – i_c^1$ в ветвях входа и выхода.

Ветви	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Токи											
В простой сети	300	200	100	350	50	0	0	0	0	0	0
В контур-ной сети	245,83	170,83	94,44	261,11	61,11	59,72	143,06	43,06	34,72	118,06	18,06
Разности	54,17	29,17	5,56	88,89	-11,11	-59,72	-143,06	-43,06	-34,72	-118,06	-18,06

(12)

Токи в ветвях на втором этапе расчета, i_c^2, обозначены по номерам ветвей, например, i_{1c}^2 = 54,17. Заданы токи i_c^2 в ветвях входа и выхода, т.е. 1–5, которые получены как разности в таблице. Задача состоит в том, чтобы найти новые источники, отклики на которые дополнят токи в ветвях на входе и на выходе до значений реальных потоков поставки и спроса. Тогда в ветвях маршрутов суммарные токи дадут распределение потоков перевозки продуктов от поставщиков к потребителям. В данном случае неизвестными являются дополнительные токи в маршрутах, в ветвях 6, 7, 8, 9, 10 и 11. Эти ветви, в силу выбора путей, определяют базис контуров в структуре сети, а токи в них равны контурным токам.

Дополнительные токи в ветвях маршрутов получаются из системы уравнений (6), где баланс токов в узлах по закону Кирхгофа выражен через матрицу инциденций, $M_0^1\ i^2_c = 0$. Эта система уравнений связывает неизвестные токи в ветвях маршрутов (контуров) и найденные токи в ветвях разомкнутых путей. Для $m – j + 1$ токов в ветвях маршрутов надо задать значения, поскольку уравнений баланса токов в узлах недостаточно.

Таким образом, неизвестные токи в маршрутах i_{3c}^2, в данном случае, в ветвях 6–11, можно получить из условия баланса токов в узлах сети A, B, C, D, E и F по закону Кирхгофа. Матрица инциденций, M_0^1, для данной сети имеет следующий вид.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	1					-1	-1	-1			
B		1							-1	-1	-1
C			-1			1			1		
D				-1			1			1	
E					-1			1			1
F	-1	-1	1	1	1						

	i_{c2}
$i_{1c}^2 =$	54,17
$i_{2c}^2 =$	29,17
$i_{3c}^2 =$	5,56
$i_{4c}^2 =$	88,89
$i_{5c}^2 =$	-11,11

(13)

Здесь справа даны известные токи разности в разомкнутых путях. Умножая матрицу инциденций на вектор токов разности, получим по узлам следующие уравнения баланса.

Узел *A*: $i_{1c}^2 = i_{6c}^2 + i_{7c}^2 + i_{8c}^2 = 54{,}17$.

Узел *B*: $i_{2c}^2 = i_{8c}^2 + i_{10c}^2 + i_{11c}^2 = 29{,}17$.

Узел *C*: $i_{3c}^2 = i_{6c}^2 + i_{9c}^2 = 5{,}56$. (14)

Узел *D*: $i_{4c}^2 = i_{7c}^2 + i_{10c}^2 = 88{,}89$.

Узел *E*: $i_{5c}^2 = i_{8c}^2 + i_{11c}^2 = -11{,}11$.

Узел *F*: $i_{1c}^2 + i_{2c}^2 - i_{3c}^2 - i_{4c}^2 - i_{5c}^2 = 0$.

В узле заземления *F* дан баланс токов ветвей входа и выхода. Таким образом, этот узел не участвует в расчете новых токов в маршрутах. Это значит, что надо выбрать значения для $m - j + 1$ токов в ветвях контуров. В данной сети контуров $m = 6$, разомкнутых путей $j = 5$, следовательно, $m - j + 1 = 6 - 5 + 1 = 2$. Надо задать значения двух свободных токов.

Например, зададим токи $i_{10c}^2 = 10$, и $i_{11c}^2 = 15$. Решая уравнения баланса в узлах, получим остальные токи в контурах $\grave{i}_2$: $i_{6c}^2 = 1{,}39$, $i_{7c}^2 = 78{,}89$, $i_{8c}^2 = -26{,}11$, $i_{9c}^2 = 4{,}17$. Умножая матрицу преобразования на вектор токов в контурах, получим дополнительные токи во всех ветвях сети. $i^2_c = {}^mC_t\, \grave{i}_2 =$

	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1	1
3	1	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	1	0
5	0	0	1	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	1	0
11	0	0	0	0	0	1

	$\grave{i}_2$
6	1,39
7	78,89
8	-26,11
9	4,17
10	10,0
11	15,0

	i^2_c
1	54,17
2	29,17
3	5,56
4	88,89
5	-11,11
6	1,39
7	78,89
8	-26,11
9	4,17
10	10,00
11	15,00

(15)

Сумма напряжений в ветвях маршрутов представляет суммарную стоимость перевозки продуктов. Напряжения в ветвях маршрутов в данном случае численно равны значениям контурных токов, поскольку выбрали, что сопротивления равны единицам. Значения источников напряжения в контурах, базисных замкнутых путях, получим по формуле, где Z` дана в (9): $e^{`}_{2} = ({}^{m}C\, Z\, {}^{m}C_{t})\, i^{`}_{2}$ = Z` $i^{`}_{2}$ =

	6	7	8	9	10	11			$i^{`}_{2}$			$e^{`}_{2}$	
6	3,0	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0		6	1,39		6	61,12	
7	1,0	3,0	1,0	0,0	1,0	0,0		7	78,89		7	221,95	
8	1,0	1,0	3,0	0,0	0,0	1,0	*	8	-26,11	=	8	16,95	(16)
9	1,0	0,0	0,0	3,0	1,0	1,0		9	4,17		9	38,90	
10	0,0	1,0	0,0	1,0	3,0	1,0		10	10,0		10	128,06	
11	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	3,0		11	15,0		11	33,06	

Сумма источников напряжения, расположенных в ветвях маршрутов, равна 500.

На рисунке 4 показаны значения токов в ветвях, которые получены на втором этапе расчета, и создающие их источники напряжения в ветвях маршрутов.

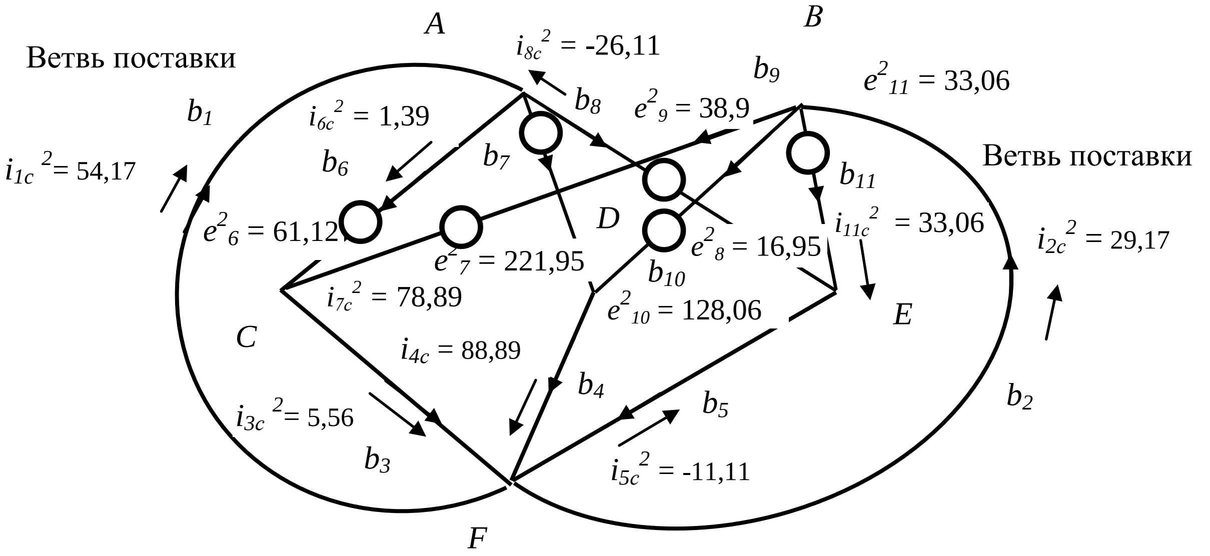


Рис. 4. Результаты расчета сетевой модели системы логистики на втором этапе транспортной системы

Сумма токов, i_c, полученных в контурной сети на первом этапе, i^{1}_{c}, и токов, полученных на втором этапе, i^{2}_{c} равна:

		i^{1}_{c}			i^{2}_{c}			$i^{1}_{c} + i^{2}_{c}$	Сумма
	1	245,83		1	54,17		1	300,00	
	2	170,83		2	29,17		2	200,00	500
	3	94,44		3	5,56		3	100,00	
	4	261,11		4	88,89		4	350,00	
$i_c = i^{1}_{c} + i^{2}_{c}$ =	5	61,11	+	5	-11,11	=	5	50,00	500

6	59,72	6	1,39	6	61,11		(17)
7	143,06	7	78,89	7	221,95		
8	43,06	8	-26,11	8	16,95		
9	34,72	9	4,17	9	38,89		
10	118,06	10	**10,00**	10	128,06		
11	18,06	11	**15,00**	11	33,06	500,01	

Справа показано, что суммы токов в узлах входа и выхода равны 500, что соответствует заданным потокам спроса и предложения, которые распределились по ветвям маршрутов. Сумма потоков по маршрутам равна сумме потоков на входе и сумме потоков на выходе, а именно, равна 500, с учетом округлений, т.е. все потоки продуктов доставлены.

На рисунке 5 показаны значения токов в ветвях, которые представляют собой сумму токов, полученных по двум этапам расчета (17). Источники напряжения не показаны.

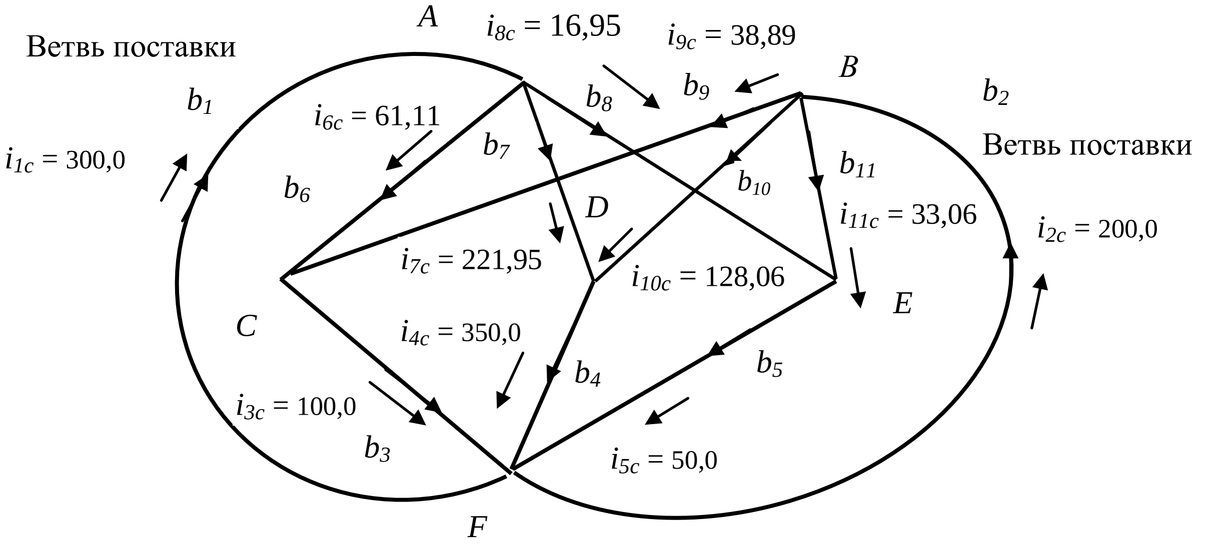


Рис. 5. Потоки продуктов в маршрутах системы логистики как сумма токов, полученных за два этапа расчета сетевой модели

Вместе с тем возможны другие варианты, задания требований по тем или иным маршрутам. Например, назначим токи в двух других ветвях маршрутов i_{6c}^{2} = 20, i_{7c}^{2} = 30. Получаются следующие результаты:

Ветви	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
i^1_c	245,83	170,83	94,44	261,11	61,11	59,72	143,06	43,06	34,72	118,06	18,06
i^2_c	54,17	29,17	5,56	88,89	-11,11	**20,00**	**30,00**	4,17	-14,44	58,89	-15,28
$i^1_c + i^2_c$	300,00	200,00	100,00	350,00	50,00	79,72	173,06	47,23	20,28	176,95	2,78

На первом этапе результаты прежние, но сумма токов, представляющая распределение потоков продуктов по маршрутам, получилась другая. Выбор значений свободных токов ограничен тем, что потоки продуктов должны быть неотрицательны.

Однако отрицательные значения можно трактовать, как необходимость вернуть уже доставленные продукты, чтобы обеспечить назначенные требования.

Сумма потоков по маршрутам также равна сумме потоков на входе и на выходе, т.е., равна 500, с учетом округлений, т.е. все потоки продуктов доставлены. Сетевая модель позволяет применять декомпозицию и расчет по частям сложных систем с помощью алгоритмов, разработанных в тензорном методе двойственных сетей.

Сетевая модель обеспечивает расчет стоимости перевозок. По аналогии будем считать, что тарифы представлены сопротивлениями ветвей. Тогда напряжения на ветвях представляют стоимость перевозки потока продуктов по данному маршруту. Сумма напряжений (стоимости) по всем маршрутам дает общую стоимость перевозки продуктов.

В качестве примера, назначим тарифы, как сопротивления в ветвях маршрутов, которые для краткости представим вектором, хотя реально это главная диагональ матрицы сопротивлений.

Напряжения на ветвях получим по формуле $e^1{}_c + e^2{}_c = Z\,(i^1{}_c + i^2{}_c)$.

Ветви	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Z	1	1	1	1	1	2	3	4	5	2	3
$i^1{}_c$	185,1	141,5	81,8	195,9	48,9	66,5	89,6	29,0	15,3	106,3	19,9
$i^2{}_c$	114,9	58,5	18,2	154,1	1,1	-15,3	139,1	-8,7	33,5	15,0	10,0
$i^1{}_c + i^2{}_c$	300,0	200,0	100,0	350,0	50,0	51,2	228,7	20,3	48,8	121,3	29,9
$e^1{}_c + e^2{}_c$	300,0	200,0	100,0	350,0	50,0	102,3	686,1	81,3	244,2	242,6	89,6

Сумма напряжений в ветвях маршрутов с 6 по 11 равна 1446,14; это полная стоимость перевозки продуктов при заданных предложении, спросе, и тарифах. Для сравнения рассмотрим другой вариант задания тарифов матрицей Z, главная диагональ которой представлена строкой.

Ветви	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Z	1	1	1	1	1	6	4	2	3	2	2
$i^1{}_c$	163,1	151,2	59,4	183,5	71,4	29,6	75,8	57,7	29,8	107,7	13,7
$i^2{}_c$	136,9	48,8	40,6	166,5	-21,4	16,8	151,5	-31,4	23,8	15,0	10,0
$i^1{}_c + i^2{}_c$	300,0	200,0	100,0	350,0	50,0	46,4	227,3	26,3	53,6	122,7	23,7
$e^1{}_c + e^2{}_c$	300,0	200,0	100,0	350,0	50,0	278,2	909,4	52,6	160,9	245,3	47,4

Сумма напряжений в ветвях маршрутов с 6 по 11 равна 1693,76; это полная стоимость перевозки продуктов при задании новых тарифов. Изменение (перераспределение) тарифов привело к другому распределению потоков по маршрутам и общей стоимости перевозки продуктов.

Заключение

Сетевая модель системы логистики создана на основе тензорного метода двойственных сетей. Сетевая модель обеспечивает построение потоков продуктов по маршрутам, от поставщиков к потребителям за два этапа расчета без итераций. Для анализа вариантов можно выбирать потоки в ветвях, значения тарифов, схемы маршрутов, и т.д.

Изменение потоков в отдельных маршрутах соответствует изменению выбора разных опорных планов. Вариации разных структур и разных параметров можно использовать для оптимизации плана перевозок. Модель обеспечивает получение плана перевозки при возникновении новых требований по объемам перевозок по тем или иным маршрутам. Сетевая модель позволяет применять декомпозицию и расчет по частям сложных систем, а также проводить расчеты потоков при изменении структуры маршрутам с помощью алгоритмов тензорного метода двойственных сетей.

Литература

1. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). М.: Наука, 1972. – 544 с.
2. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.
3. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей. М.: ООО ЦИТиП. http://www.uni-dubna.ru///images/data/gallery/70_971_tenzorny_method25_02.pdf – 2009. – 496 с.
4. Петров А.Е. Логистика в САПР. Часть 1. Логистика производства: учебно-методическое пособие М.: МГГУ, 2012. – 92 с. http://window.edu.ru/resource/548/79548 http://www.twirpx.com/file/1193744/ – 2012. Часть 2. Информационная логистика: учебно-методическое пособие М.: МГГУ. – 112 с. http://window.edu.ru/resource/549/79549 – 2013.
5. Образцова Р.И., Кузнецов П.Г., Пшеничников С.Б. Инженерно-экономический анализ транспортных систем. Методология проектирования автоматизированной системы управления / Под. Ред. К.В. Фролова.- 2-е изд. Стереотип. – М.: Радио и связь, 1996. – 192 с.: илл. – ISBN 5-256-01342-4.
6. Петров А.Е. Закон сохранения мощности в двойственных тензорных сетях Г.Крона – А.Петрова (в пространстве, времени и структуре). Электронное научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление», ISSN 2075-1427. том 15 № 1 (42), 2019, ст. 1. – с. 1–39. http://www.rypravlenie.ru/?p=3356
7. Петров А.Е. Сетевые методы планирования производства: учебно-методическое пособие. М.: МГГУ. http://window.edu.ru/resource/545/79545/files/Petrov_methods.pdf. – 2010. – 144 с.

8. Petrov A.E. Tensor Method and Dual Networks in Electrical Engineering. ISSN 1068-3712, Russian Electrical Engineering, 2008, Vol. 79, No. 12, pp. 645–654. © Allerton Press, Inc., 2008. *ISSN 1068-3712, https://pdfslide.net/documents/tensor-method-and-dual-networks-in-electrical-engineering.html. Original Russian Text © A.E. Petrov, 2008, published in Elektrotekhnika, 2008, No. 12, pp. 2–12.*
9. Petrov A.E. The duality of networks for computer-aided design systems with variable structure. Mining Informational and analytical bulletin (scientific and technical journal). Reports of the XXIII International Scientific symposium «Miner's week – 2015» Сб. науч. тр. Издательский дом НИТУ «МИСиС». ISBN 987-5-87623-891-7. – 2015.
10. Петров А.Е. Тензорный метод двойственных сетей для расчета сложных систем по частям. – УДК: 338.26.015: 658.5, М.: Изд-во «Горная книга». С. 168-192. М.: МГГУ, Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал), 2017.
11. Bolshakov B.E., Petrov A.E. Algorithms of Multidimensional Space and Time Values Interrelation in the System of LT Dimension Coordinates by B. Brown, R.O. Bartini, P.G. Kuznetsov. *Journal of Engineering and Applied Sciences,* Pakistan, 2017, 12: pp. 6620-6627. DOI: 10.36478/jeasci.2017.6620.6627. https://medwelljournals.com/abstract/?doi=jeasci.2017.6620.6627
12. Королькова М. А. Оптимизация сети авиалиний на основе тензорной методологии. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук, СПБ, 2003.
13. Сохор Ю.Н. Тензорный анализ сетей и диакоптика в инженерных расчетах / Ю.Н. Сохор. – М.: LAP Lambert Academic Publishing, 2012. – 200 с.
14. Воронов П.Л. Особенности применения матриц преобразования и уравнений связи при анализе несимметричных повреждений. Bulletin of the South Ural State University. Ser. Power Engineering. 2018, vol. 18, no. 1, pp. 27–37.
15. Лямец Ю.Я. Эквивалентирование многопроводных систем при замыканиях и обрывах части проводов / Ю.Я. Лямец, Д.Г. Еремеев,Г.С. Нудельман // Электричество. – 2003. – № 11. – С. 17–27.
16. Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков//Автоматика и телемеханика, 2003, Vol. 11, P. 3-46.
17. Cascetta. Transportation Systems Analysis. Models and Applications. Springer, 2009.

18. Петров А.Е. Диакоптика структуры транспортных сетей – XVI Всероссийская научная конференция «Нейрокомпьютеры и их применение». Тезисы докладов М.: МГППУ – 2018 – с. 315–317. ISBN 978-5-94051-136-6. http://it.mgppu.ru/upload/iblock/b35/НКП%20XVI%20%20тезисы.indd%20(1).pdf.
19. Петров А.Е. Сетевая модель системы логистики // Сетевое научное издание «Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление». 2021. Т. 17, вып. 3 (52). – с. 1–20. URL: http://www.rypravlenie.ru/?p=3792.
20. Богданова Л.В. Дискретный тензорный анализ на железнодорожном транспорте. В сборнике: Труды международной научно-практической конференции «Перспективы развития и эффективность функционирования транспортного комплекса Юга России». В 3 частях. Ростовский государственный университет путей сообщения. 2015. С. 81-83.
21. Petrov A.E., Fedorov A.V., Kochegarov A.V., Lomaev E.N., Preobrazhenskiy A.P. The Analysis of Network Models for the Design of Industrial and Fire Safety Systems for Oil Refineries. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 808 (2021) 012024, IOP Publishing doi:10.1088/1755-1315/808/1/012024.
22. Литвинов К.А., Пасечников И.И. Алгоритм расчета тензорной модели сети на основе симплексного метода Данцига. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 6-2. С. 3370-3375. https://cyberleninka.ru/article/n/algoritm-rascheta-tenzornoy-modeli-seti-na-osnove-simpleksnogo-metoda-dantsiga. URL РИНЦ: https://elibrary.ru/item.asp?id=21106190.
23. Морозов А.В., Пономарев Д.Ю. Модель распределения трафика в многоуровневой инфокоммуникационной сети специального назначения. Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2021. т. 9. № 1 (32). с. 11-12.